

Simulation de neige (mouillée).

Compléments mathématiques et physiques.

Jean-Cédric Chappelier

version 1.1 (12 février 2026)

© EPFL 2026

Résumé

Le projet de cette année s'intéresse à la simulation numérique de particules de matière en interaction entre elles (comme p.ex. des flocons ou des petits paquets de neige au sol). Il existe de nombreux modèles pour cela et nous ne considérerons que celui de particules dans un fluide (comme de la neige mouillée) dont nous pouvons modéliser les interactions au moyen d'une force dérivant d'un potentiel prenant en compte l'attraction des particules à moyenne distance (forces de capillarité du fluide « liant » les particules) et leur répulsion à courte distance (incompressibilité du fluide entre deux particules trop proches).

Le présent document ne constitue que le *complément* mathématique de la donnée du projet. Pour plus de détails sur la donnée précise, le cadre du projet lui-même, etc., voir la page Web du projet.

Table des matières

1	Cadre du projet	2
2	Schéma d'évolution d'une particule	2
3	Coefficient de frottement	2
4	Simulation par interactions via potentiel de Lennard-Jones	3
4.1	Interaction entre deux particules	3
4.2	Force entre une particule et un obstacle	4
4.3	Étude de la norme de la force	4
A	Notations	6
B	Point le plus proche de différentes formes	8

1 Cadre du projet

Note : Pour les notations, veuillez vous reporter à l'annexe A.

On s'intéresse ici à la simulation numérique de particules en interaction dans un milieu fluide. Chaque particule est supposée sphérique, de rayon R , de masse volumique ρ (sa masse m est alors $m = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$), de position $\vec{x}$ (position du centre de gravité) et de vitesse $\vec{v}$.

Chaque particule est soumise à chaque instant t à une équation du mouvement de la forme

$$\vec{F}(t) + m\vec{g} - \lambda(v(t))\vec{v}(t) = m\frac{d\vec{v}}{dt}(t)$$

où $\lambda(v(t))$ est un scalaire dépendant de la norme de la vitesse de la particule et représentant le coefficient de frottement fluide de la particule dans son milieu (cf section 3) et $\vec{F}(t)$ la somme des forces extérieures (hors poids) s'exerçant sur la particule à l'instant t .

2 Schéma d'évolution d'une particule

Une méthode de résolution d'une telle équation (appelée « méthode d'Euler-Cromer ») consiste à calculer la nouvelle vitesse et nouvelle position comme suit :

$$\begin{aligned}\vec{v}(t + \Delta t) &= \vec{v}(t) + \frac{\Delta t}{m} \underbrace{\left(\vec{F}(t) + m\vec{g} - \lambda(v(t))\vec{v}(t) \right)}_{\text{force totale s'appliquant sur la particule}} \\ \vec{x}(t + \Delta t) &= \vec{x}(t) + \Delta t \vec{v}(t + \Delta t)\end{aligned}$$

3 Coefficient de frottement

Le coefficient de frottement fluide pour une particule de vitesse v (et de rayon R) est :

$$\lambda(v) = \begin{cases} 6\pi R \eta_{\text{milieu}} & \text{si } v \leq \frac{80\eta_{\text{milieu}}}{3\rho_{\text{milieu}}} \frac{1}{R} \\ \frac{9\pi}{40} R^2 \rho_{\text{milieu}} v & \text{sinon} \end{cases}$$

où les paramètres ρ_{milieu} (masse volumique) et η_{milieu} (viscosité dynamique) utilisés peuvent prendre les valeurs suivantes :

	ρ (en kg m^{-3})	η (en $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$)	$\frac{80\eta}{3\rho}$ (en $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$)
air	$\rho_{\text{air}} = 1.3$	$\eta_{\text{air}} = 1.8 \cdot 10^{-5}$	$\frac{80\eta_{\text{air}}}{3\rho_{\text{air}}} = 3.7 \cdot 10^{-4}$
eau	$\rho_{\text{eau}} = 10^3$	$\eta_{\text{eau}} = 10^{-3}$	$\frac{80\eta_{\text{eau}}}{3\rho_{\text{eau}}} = 2.7 \cdot 10^{-5}$

4 Simulation par interactions via potentiel de Lennard-Jones

Nous considérons que les particules sont plongées dans un fluide et que nous pouvons modéliser les interactions au moyen d'une force dérivant d'un potentiel prenant en compte leur attraction à moyenne distance (forces de capillarité du fluide « liant » les particules entre elles) et leur répulsion à courte distance (incompressibilité du fluide entre deux particules trop proches).

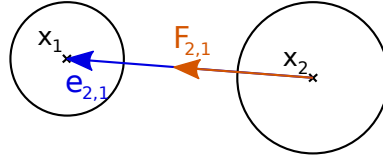
La force $\vec{F}$ exercée sur une particule résulte de la somme des forces exercées par les particules voisines et obstacles qu'elle touche, dérivant chacune d'un potentiel répulsif à courte distance, attractif à moyenne distance et nul à grande distance.

La force totale qui agit sur une particule i s'écrit :

$$\vec{F}_i = \sum_{k \text{ voisin(e) de } i} \vec{F}_{i,k}$$

4.1 Interaction entre deux particules

Deux particules i et j exercent une force l'une sur l'autre qui dépend de leur distance. Soit $\vec{e}_{i,j}$ l'écart (orienté) entre la particule i et la particule j : $\vec{e}_{i,j} = \vec{x}_j - \vec{x}_i$.



La forme vectorielle de la force exercée par la particule j sur la particule i est alors donnée par¹ :

$$\vec{F}_{i,j} = \frac{24\varepsilon}{\sigma^2} f\left(\frac{e_{i,j}}{\sigma}\right) \{\vec{e}_{i,j}\}_1$$

où σ et ε sont deux paramètres (σ contrôle l'échelle sur l'axe des abscisses et ε l'échelle sur l'axe des ordonnées, c.-à-d. l'intensité de la force) et

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{x^6 - 2}{x^{13}} & \text{si } 1 < x < 2 \\ 0 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

décrite plus en détail en section 4.3.

1. Rappel : pour les notations, veuillez vous reporter à l'annexe A.

4.2 Force entre une particule et un obstacle

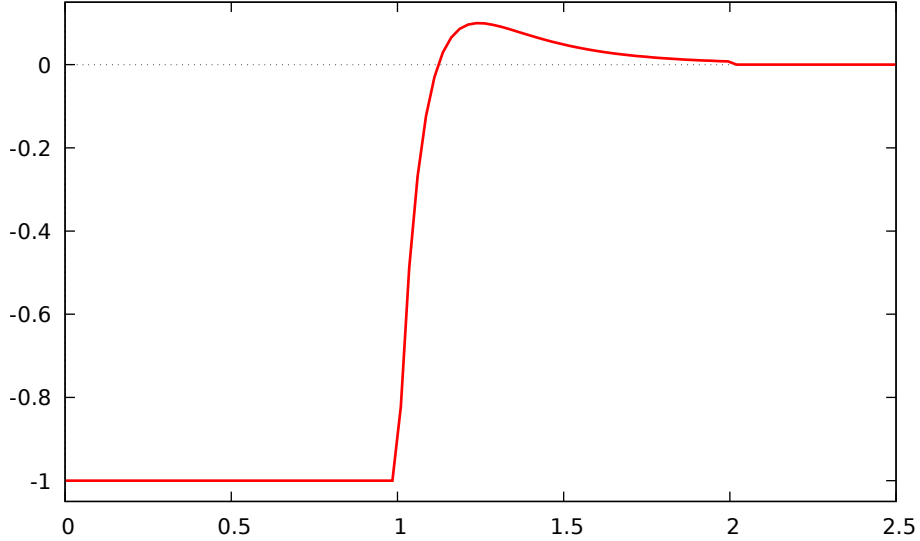
Les obstacles sont tous immobiles, mais ils exercent une force sur toutes les particules suffisamment proches. Pour simplifier, la relation est exactement la même que celle pour la force entre deux particules à un facteur 2 près, qui garantit la conservation de l'énergie (car l'obstacle est immobile). La force entre une particule i et un obstacle k est alors :

$$\vec{F} = 2 \times \frac{24\varepsilon}{\sigma^2} f\left(\frac{e_{i,k}}{\sigma}\right) \{\vec{e}_{i,k}\}_1$$

La distance (orientée) $\vec{e}_{i,k}$ entre la particule i et l'obstacle k est mesurée à partir du centre de la particule au point le plus proche de l'obstacle. L'annexe B donne les formules de distance entre particule et obstacle pour différentes formes géométriques simples.

4.3 Étude de la norme de la force

La force décrite plus haut par la fonction $\frac{24\varepsilon}{\sigma^2} f\left(\frac{x}{\sigma}\right)$ a la forme suivante (l'axe des abscisse est ici gradué en σ et l'axe des ordonnées en $\frac{24\varepsilon}{\sigma^2}$:



Son minimum, atteint sur l'intervalle $]0, \sigma]$, vaut $-\frac{24\varepsilon}{\sigma^2}$.

Son maximum, atteint en $x = \left(\frac{26}{7}\right)^{\frac{1}{6}} \sigma \simeq 1.244 \sigma$, vaut $\frac{24\varepsilon}{\sigma^2} \frac{21}{169} \left(\frac{7}{26}\right)^{\frac{1}{6}} \simeq \frac{2.4\varepsilon}{\sigma^2}$, soit environ un dixième de la valeur absolue du minimum.

Cette force est nulle (c.-à-d. point d'équilibre) pour $x = 2^{\frac{1}{6}} \sigma \simeq 1.122 \sigma$ (ainsi que, évidemment, pour $x > 2\sigma$).

Références

- [1] Jean-Philippe Ansermet (2022), *Mécanique*, PPUR (3^e éd.).
- [2] Denis Steffen (2021), *A depth-averaged material point method for alpine mass movements*, Master thesis EPFL; <https://infoscience.epfl.ch/entities/publication/88de01c0-7fc4-4ef2-a99a-11deb607665f>

A Notations

On note par des lettres simples les grandeurs scalaires (p.ex. x) et en **gras** surligné d'une flèche les grandeurs vectorielles (p.ex. $\vec{x}$).

Par convention, on note x la norme du vecteur $\vec{x}$ (p.ex. $v = \|\vec{v}\|$) et les composantes sont notées par un indice (et sont des scalaires) : x_1 est ainsi la première composante du vecteur $\vec{x}$.

On note par ailleurs $\{\vec{x}\}_1$ le vecteur unitaire colinéaire et de même sens que $\vec{x}$, c.-à-d. :

$$\{\vec{x}\}_1 = \frac{1}{x} \vec{x}$$

La notation « $\longleftarrow$ » est une notation algorithmique signifiant « mise à jour », « devient ». Par exemple pour dire que la grandeur x augmente d'une valeur a , on note : $x \longleftarrow x + a$.

Résumé de quelques notations fréquentes :

- $\vec{x}$: position (du centre de gravité) d'un objet ;
- $\vec{v}$: vitesse du centre de masse ;
- R : rayon d'une particule ;
- ρ : masse volumique d'une particule ;
- m : masse d'une particule : $m = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$;
- λ : coefficient de frottement fluide : $-\lambda \vec{v}$; λ est lui-même fonction de la norme de la vitesse : $-\lambda(v(t)) \vec{v}(t)$; voir section 3 ;
- ρ_{milieu} : masse volumique du fluide contenant les particules (eau, air, ...) ; voir section 3 ;
- η_{milieu} : viscosité dynamique du fluide contenant les particules ; voir section 3 ;
- $\vec{e}_{i,j}$: écart (vectoriel) entre deux particules : $\vec{e}_{i,j} = \vec{x}_j - \vec{x}_i$;
- $\vec{F}_i(t)$: somme des forces extérieures, hors poids, s'exerçant sur la particule i à l'instant t ; voir section 4 ;
- $\vec{F}_{i,j}$: force exercée par la particule j sur la particule i ; voir section 4 ;
- σ : paramètre d'échelle du potentiel de Lennard-Jones ; voir section 4.1 ;
- ε : paramètre d'intensité du potentiel de Lennard-Jones ; voir section 4.1 ;
- Δt : « pas de temps » (« *timestep* » en anglais) pour l'intégration numérique ;

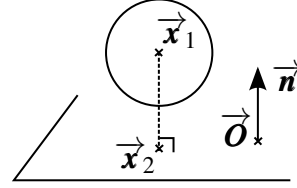
- $\vec{n}$: vecteur « normale » (unitaire, perpendiculaire aux vecteurs tangents);
- $\vec{O}$: « origine » des objets, point de repère pour les placer dans l'espace; pour les objets simples, c'est simplement la position du centre de masse $\vec{x}$, exprimée dans le repère utilisé pour la visualisation (possible changement de repère);
- L : longueur (générique); l : « largeur »; h : « hauteur »;
- $\vec{e_L}$: vecteur unitaire suivant la longueur; $\vec{e_l}$: suivant la « largeur » (la « hauteur » est suivant $\vec{n}$);

B Point le plus proche de différentes formes

Cette annexe explique comment déterminer le point le plus proche entre un point et différentes formes.

B.1 Plan infini

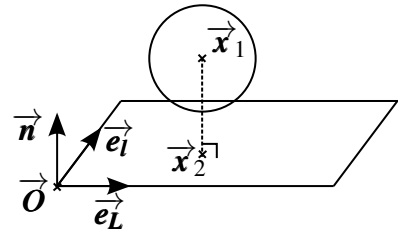
Dans le cas d'un plan infini défini par un point $\vec{O}$ et un vecteur normal $\vec{n}$ (unitaire), le point $\vec{x}_2$ le plus proche sur ce plan du point de position $\vec{x}_1$ s'exprime comme :



$$\vec{x}_2 = \vec{x}_1 + \left((\vec{O} - \vec{x}_1) \cdot \vec{n} \right) \vec{n}$$

B.2 Portion de plan

Dans le cas d'une portion rectangulaire de plan d'origine $\vec{O}$, de normale $\vec{n}$ (unitaire), de longueur L suivant la direction $\vec{e}_L$ (unitaire et orthogonal à $\vec{n}$) et de largeur l suivant la direction $\vec{e}_l$ ($\vec{e}_l = \vec{n} \wedge \vec{e}_L$), le point $\vec{x}_2$ le plus proche sur ce plan du point de position $\vec{x}_1$ se calcule comme suit :



1. Commencez par calculer le point le plus proche dans le plan infini comme précédemment :

$$\vec{x}_2 \leftarrow \vec{x}_1 + \left((\vec{O} - \vec{x}_1) \cdot \vec{n} \right) \vec{n}.$$

2. Calculez ensuite ses coordonnées suivant $\vec{e}_L$ et $\vec{e}_l$:

$$x_{kL} = (\vec{x}_2 - \vec{O}) \cdot \vec{e}_L,$$

$$x_{kl} = (\vec{x}_2 - \vec{O}) \cdot \vec{e}_l.$$

3. Si $x_{kL} > L$

$$\vec{x}_2 \leftarrow \vec{x}_2 - (x_{kL} - L) \vec{e}_L,$$

sinon, si $x_{kL} < 0$

$$\vec{x}_2 \leftarrow \vec{x}_2 - x_{kL} \vec{e}_L.$$

4. Ensuite, si $x_{kl} > l$

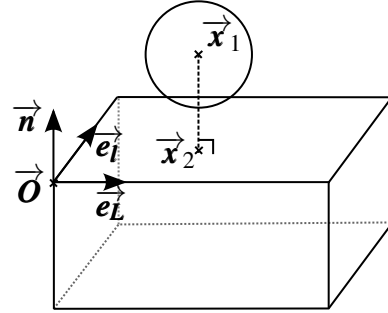
$$\vec{x}_2 \leftarrow \vec{x}_2 - (x_{kl} - l) \vec{e}_l,$$

sinon, si $x_{kl} < 0$

$$\vec{x}_2 \leftarrow \vec{x}_2 - x_{kl} \vec{e}_l.$$

B.3 Brique (parallélépipède)

Dans le cas d'un parallélépipède rectangle (« brique ») d'origine $\vec{O}$, de hauteur h suivant la direction $\vec{n}$ (unitaire), de longueur L suivant la direction $\vec{e}_L$ (unitaire et orthogonal à $\vec{n}$) et de largeur l suivant la direction $\vec{e}_l$ ($\vec{e}_l = \vec{n} \wedge \vec{e}_L$), le point $\vec{x}_2$ le plus proche sur l'objet sphérique de centre $\vec{x}_1$ se calcule comme suit :



Calculez le point le plus proche à chacune des six faces (voir section précédente) et retenez au final le plus proche de $\vec{x}_1$.

Attention pour cela aux caractéristiques de chacune des faces (je prends ici la convention que la normale sort de la brique et que la face est toujours du côté coordonnées positives de ses axes, ce n'est pas utile ici mais pourrait peut-être l'être ailleurs (distinction intérieur/extérieur)) :

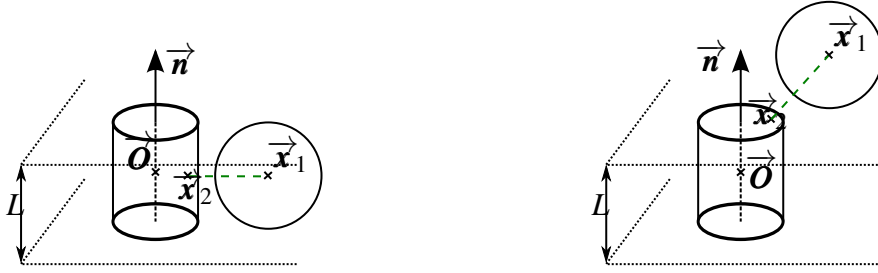
face	origine	normale	longueur	« $\vec{e}_L$ »	largeur	« $\vec{e}_l$ »
1	$\vec{O}$	$\vec{n}$	L	$\vec{e}_L$	l	$\vec{e}_l$
2	$\vec{O}$	$-\vec{e}_l$	h	$-\vec{n}$	L	$\vec{e}_L$
3	$\vec{O}$	$-\vec{e}_L$	l	$\vec{e}_l$	h	$-\vec{n}$
4	$\vec{O} + L\vec{e}_L$	$\vec{e}_L$	h	$-\vec{n}$	l	$\vec{e}_l$
5	$\vec{O} + l\vec{e}_l$	$\vec{e}_l$	L	$\vec{e}_L$	h	$-\vec{n}$
6	$\vec{O} - h\vec{n}$	$-\vec{n}$	l	$\vec{e}_l$	L	$\vec{e}_L$

B.4 Sphère

Dans le cas d'une sphère de centre $\vec{O}$ et de rayon R , le point $\vec{x}_2$ le plus proche sur cette sphère du point de position $\vec{x}_1$ est donné par :

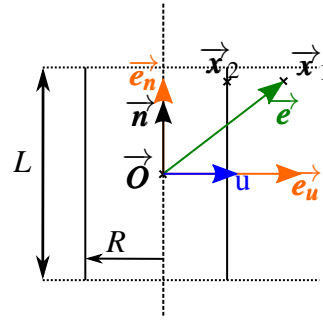
$$\vec{x}_2 = \vec{O} + R \left\{ \vec{x}_1 - \vec{O} \right\}_1$$

B.5 Cylindre



Dans le cas d'un cylindre de révolution, de centre $\vec{O}$, de rayon R , de hauteur L et de normale $\vec{n}$ (unitaire) et pour point de position $\vec{x}$, nous introduisons les notations suivantes :

$$\begin{aligned}\vec{e} &= \vec{x} - \vec{O} \\ \vec{e}_n &= (\vec{e} \cdot \vec{n}) \vec{n} \\ \vec{n}^* &= \frac{\vec{e}_n}{\|\vec{e}_n\|} = \frac{\vec{e}_n}{\vec{e} \cdot \vec{n}} = \text{signe}(\vec{e} \cdot \vec{n}) \vec{n} \\ \vec{e}_u &= \vec{e} - \vec{e}_n = \vec{e} - (\vec{e} \cdot \vec{n}) \vec{n} \\ \vec{u} &= \frac{\vec{e}_u}{\|\vec{e}_u\|} = \{\vec{e}_u\}_1\end{aligned}$$



(Remarquez que, contrairement à $\vec{n}$, $\vec{n}^*$ est toujours dirigé du même côté de $\vec{O}$ que $\vec{x}$.)

Le point matériel (objet) considéré est forcément hors du cylindre, c.-à-d. :
soit

$$|\vec{e} \cdot \vec{n}| \geq \frac{L}{2},$$

soit

$$\|\vec{e}_u\|^2 = \|\vec{e}\|^2 - (\vec{e} \cdot \vec{n})^2 \geq R^2.$$

Le point $\vec{x}_k$ le plus proche sur ce cylindre s'exprime alors comme :

— Si $|\vec{e} \cdot \vec{n}| < \frac{L}{2}$:

$$\vec{x}_k = \vec{O} + \vec{e}_n + R \vec{u}$$

— Sinon ($|\vec{e} \cdot \vec{n}| \geq \frac{L}{2}$) :

$$\vec{x}_k = \vec{O} + \frac{L}{2} \vec{n}^* + \min(R, \|\vec{e}_u\|) \vec{u}$$