

Simulateur pour exercices de Physique. Compléments mathématiques et physiques.

Jean-Cédric Chappelier

version 1.1 (20 février 2025)

© EPFL 2025

Résumé

Le projet de cette année s'intéresse à la simulation numérique d'exercices de Physique, comme par exemple ceux donnés dans le cours de « Physique avancée ».

Le présent document ne constitue que le *complément* mathématique de la donnée du projet. Pour plus de détails sur la donnée précise, le cadre du projet lui-même, etc., voir la page Web du projet sur le site du cours, qui vous expliquera en détails, semaine après semaine, quoi faire précisément.

Ne prenez donc pas « peur » à la vue de ce document ci (qui est principalement constitué d'annexes, dont la plupart sont « pour aller plus loin »). Il n'est là que pour vous détailler précisément chaque contexte, vous expliquer tous les calculs, que nous avons justement déjà faits pour vous ! Il n'a pas pour but d'être lu linéairement de bout en bout, mais de s'y référer lorsque nécessaire (mentionné dans les sujets hebdomadaires) ou pour les étudiant(e)s intéressé(e)s d'approfondir tel ou tel aspect physico-mathématique de la donnée.

Remerciements : je tiens à remercier chaleureusement M^{elle} Lucie MOULIN et M. Raphaël FALTIN pour leur aide précieuse lors de la conception de ce projet.

Révisions

1.1 20.02 [mineure] clarification et meilleure utilisation de $\vec{k} = \{\vec{g}\}_1$.

Table des matières

1	Cadre général du projet	2
2	Modélisation générique d'objets évolutants	2
3	Intégration numérique	4
3.1	Idée générale : méthode d'Euler	5
3.2	Intégrateur d'Euler-Cromer	6
3.3	Intégrateur de Newmark	6
3.4	Intégrateur Runge-Kutta d'ordre 4	7
A	Notations	9
B	Divers objets	11
C	Notion de degré de liberté	16
D	Point le plus proche de différentes formes	17
E	Chocs	20
F	Choc entre objets sphériques à 6 degrés de liberté	22
G	Compléments sur l'intégration numérique	24

1 Cadre général du projet

Le projet de cette année s'intéresse à la simulation numérique générique d'objets physiques simples décrit essentiellement par la Physique du point matériel (éventuellement chargé) tels qu'on les trouve par exemple dans les exercices du cours de « Physique avancée ».

Le but est justement de pouvoir reproduire ici, numériquement, les comportements décrits dans ces exercices. L'idée serait de vous offrir une « boîte à outil » assez générique pour que vous puissiez facilement simuler des situations physiques simples (p.ex. pour tester vos résultats d'exercices théoriques), voire que vous puissiez par le futur la faire évoluer suivant vos besoins.

Le présent document ne constitue que le *complément* mathématique de la donnée du projet. Pour plus de détails sur la donnée précise, le cadre du projet lui-même, etc., voir la page Web du projet.

2 Modélisation générique d'objets évolutants

On s'intéresse ici à la simulation numérique d'objets à n degrés de liberté (voir annexe C pour la notion de degré de liberté).

De tels objets possèdent (au moins) :

1. un « vecteur d'état » $\vec{E} \in \mathbb{R}^n$ représentant les valeurs de ses n degrés de liberté ;
2. et une « équation d'évolution » f décrivant l'évolution temporelle de leur vecteur d'état.

Dans les cas les plus simples, l'équation d'évolution prend la forme $\vec{E}(t) = f(t)$; typiquement lorsque l'on a déjà fait toute l'analyse analytiquement sur papier et trouvé la forme algébrique finale de l'équation du mouvement.

Dans les cas les plus avancés, l'équation d'évolution est une équation différentielle (par exemple une loi de mouvement newtonien) :

$$\ddot{\vec{E}} = f(t, \vec{E}, \dot{\vec{E}}) \quad (1)$$

où $\ddot{\vec{E}} = \frac{d^2\vec{E}}{dt^2}$ et $\dot{\vec{E}} = \frac{d\vec{E}}{dt}$ (f est alors une fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R}^n).

Un cas intermédiaire entre les deux cas précédents serait d'avoir une équation d'évolution qui soit une équation différentielle du premier ordre.

Dans le cadre de ce projet, cette équation d'évolution sera donnée par un ensemble de *forces* \vec{F} (p.ex. la gravité) et un ensemble de *contraintes* \mathbf{C} (p.ex. retenu par une tige) s'appliquant à l'objet.

Par ailleurs, pour la représentation géométrique (c.-à-d. le dessin) des objets, nous introduirons indépendamment de leur vecteur d'état, une position de référence \vec{O} (c.-à-d. son « origine », l'endroit où l'objet est placé dans l'espace de référence) et un vecteur unitaire \vec{d} , sa « direction principale », utile pour représenter son orientation dans l'espace.

Concrètement, ces deux données permettent de passer du repère propre à l'objet, choisi pour décrire les équations du mouvement, au repère de référence utilisé pour visualiser la simulation. C'est la contrainte \mathbf{C} qui impose ces deux caractéristiques.

Dans le cadre de ce projet, un « objet évoluant » sera donc constitué d'au moins $(\vec{E}, \dot{\vec{E}}, \vec{F}, \mathbf{C})$. Il pourra ensuite être utile de leur ajouter une masse ou une densité, un volume, etc., en fonction de l'objet en question (voir au cas par cas dans les données hebdomadaires précises).

Pour le modèle le plus simple, un point matériel, c.-à-d. un objet mobile libre à 3 degrés de liberté de translation (p.ex. une balle sans rotation propre) représenté simplement par la trajectoire de son centre de masse, le vecteur d'état \vec{E} est de dimension 3 et représente simplement la position du centre de masse dans l'espace.

L'équation d'évolution f d'un tel objet est donnée par la 2^e loi de Newton :

$$f(t, \vec{E}, \dot{\vec{E}}) = \frac{1}{m} \vec{F}_{\text{ext}}(t)$$

Un tel objet sera donc caractérisé par la résultante \vec{F}_{ext} des forces externes qu'il subit, sa masse m , sa position et sa vitesse. Il n'a pas de contrainte¹.

1. Il a plus exactement la contrainte « libre » qui a pour origine l'origine du repère principal (repère de visualisation), comme direction \vec{d} le premier vecteur de base du repère principal et comme équation de transformation des forces, simplement $\frac{1}{m} \vec{F}$.

Un autre exemple serait un pendule pesant de longueur fixe. Son vecteur d'état \vec{E} est alors de dimension 1 (un scalaire) et représente l'angle d'écart à la position d'équilibre. Un tel objet aura par contre la contrainte de rester à distance fixe du point d'attache (contrainte « cercle »).

Divers types d'objets sont par ailleurs détaillés en annexe B, page 11.

Une contrainte C sera constituée (d'au moins) \vec{O} , \vec{d} , et d'une fonction qui à partir de t , \vec{E} , $\dot{\vec{E}}$ et \vec{F} , retourne $f(t, \vec{E}, \dot{\vec{E}})$. Tout ceci sera détaillé très précisément le moment venu (voir par exemple l'annexe B.2 pour le pendule pesant et la contrainte « cercle »).

3 Intégration numérique

La résolution mathématique exacte d'une équation telle que (1) page 3 est impossible dans la plupart des cas réels non triviaux. En fait, peu d'équations différentielles possèdent une solution calculable analytiquement. Pour les résoudre, il faut alors passer par l'analyse numérique, c.-à-d. le calcul approché, numérique, d'une solution particulière à l'équation différentielle pour des conditions initiales données. On parle d'« *intégration numérique* ». C'est un sujet délicat dont nous ne présentons ici que quelques solutions possibles, assez simples.²

Pour une équation différentielle du second ordre écrite sous la forme générale :

$$\ddot{\vec{E}} = f(t, \vec{E}, \dot{\vec{E}})$$

où \vec{E} est un vecteur de dimension q (les « degrés de liberté » en Physique, cf annexe C) et f est une fonction vectorielle de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$ dans \mathbb{R}^q (qui en Physique représente typiquement les équations du mouvement), le schéma général est le suivant :

$$\left. \begin{array}{l} t \\ \Delta t \\ \vec{E}(t) \\ \dot{\vec{E}}(t) \\ f \end{array} \right\} \longrightarrow \boxed{\text{Intégrateur}} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}(t + \Delta t) \\ \dot{\vec{E}}(t + \Delta t) \end{array} \right.$$

c.-à-d. que l'on fait appel à un module, l'« intégrateur », qui à partir de l'état courant et de l'équation d'évolution f calcule le nouvel état, un temps Δt plus tard.

Note : dans le cas particulier de notre projet, les forces en jeu ne varient pas en fonction du temps et nous avons donc une version simplifiée du cas général précédent :

$$\ddot{\vec{E}} = f(\vec{E}, \dot{\vec{E}})$$

2. Pour ceux que cela intéresse, l'annexe G, page 24, présente quelques compléments, non nécessaires à ce projet.

Je garderai cependant la dépendance à t dans la suite de cette section afin d'avoir une description très générale, bien que dans le cas particulier de cette année cette dépendance au temps puisse être ignorée.

Il existe de nombreux moyens d'intégrer numériquement une équation différentielle telle que celle présentée plus haut. Le moyen le plus simple, dont nous allons nous servir ici pour illustrer les principes, est la méthode dite « d'Euler ». Dans ce projet, vous implémenterez dans un premier temps l'intégrateur d'Euler-Cromer (section 3.2, page 6), et ensuite un autre intégrateur parmi ceux présentés plus loin. Mais commençons par le plus simple...

3.1 Idée générale : méthode d'Euler

Imaginons que nous connaissions des conditions initiales, c.-à-d. les valeurs $\vec{E}(T_0)$ et $\dot{\vec{E}}(T_0)$ de \vec{E} et $\dot{\vec{E}}$ au temps T_0 . On peut alors utiliser un développement limité au premier ordre pour trouver la valeur de \vec{E} au temps $T_0 + \Delta t$:

$$\vec{E}(T_0 + \Delta t) \simeq \vec{E}(T_0) + \Delta t \cdot \dot{\vec{E}}(T_0)$$

Par le même raisonnement, on peut écrire pour la dérivée :

$$\begin{aligned} \dot{\vec{E}}(T_0 + \Delta t) &\simeq \dot{\vec{E}}(T_0) + \Delta t \cdot \ddot{\vec{E}}(T_0) \\ &= \dot{\vec{E}}(T_0) + \Delta t \cdot f(T_0, \vec{E}(T_0), \dot{\vec{E}}(T_0)) \end{aligned}$$

On peut alors, ainsi de suite, en répétant les approximations précédentes de proche en proche, déterminer de cette manière la valeur de \vec{E} et $\dot{\vec{E}}$ pour tout temps t de la forme $T_0 + n\Delta t$.

Cette méthode utilise un « *pas de temps* » Δt qu'il faut choisir suffisamment petit pour que l'approximation faite dans le développement limité soit « raisonnable ». Ceci peut faire l'objet de nombreuses études qui seront le sujet de votre cours d'analyse numérique. Dans notre cas, un choix arbitraire fixe (donné le moment voulu dans la donnée hebdomadaire) sera suffisant.

Pour ceux que ça intéresse, les aspects (avancés) concernant la conservation de l'énergie des systèmes physiques ainsi simulés sont présentés en annexe G.

Nous présentons maintenant trois méthodes différentes, de la plus simple à la plus compliquée, pour résoudre numériquement les équations différentielles du second ordre qui nous intéressent dans ce projet.

Nous présenterons également les versions pour équations différentielles du premier ordre, $\dot{\vec{E}} = f(t, \vec{E})$.

En cas de doute sur les notations, reportez-vous à l'annexe A, page 9.

3.2 Intégrateur d'Euler-Cromer

3.2.1 Équation différentielle du 2^e ordre

Dans la méthode d'Euler-Cromer, on calcule $\vec{E}^{(n)}$ et $\dot{\vec{E}}^{(n)}$ comme suit :

$$\begin{aligned}\dot{\vec{E}}^{(n)} &= \dot{\vec{E}}^{(n-1)} + \Delta t \cdot f(T_{n-1}, \vec{E}^{(n-1)}, \dot{\vec{E}}^{(n-1)}) \\ \vec{E}^{(n)} &= \vec{E}^{(n-1)} + \Delta t \cdot \dot{\vec{E}}^{(n)}\end{aligned}$$

À noter la différence avec la méthode d'Euler classique présentée plus haut, laquelle utilise l'*ancienne* version $\dot{\vec{E}}^{(n-1)}$ de la vitesse dans la seconde équation.

La méthode d'Euler-Cromer est meilleure que la méthode d'Euler classique car elle garantit la conservation de l'énergie (on parle d'« *intégrateur symplectique* », cf section G pour ceux que cela intéresse).

3.2.2 Équation différentielle du 1^{er} ordre

Pour les équations différentielles du 1^{er} ordre, on utilise simplement la formule suivante :

$$\vec{E}^{(n)} = \vec{E}^{(n-1)} + \Delta t \cdot f(T_{n-1}, \vec{E}^{(n-1)})$$

3.3 Intégrateur de Newmark

(Pour équations différentielles du 2^e ordre uniquement)

Les intégrateurs précédents utilisent un calcul *direct* des nouvelles valeurs $\vec{E}^{(n)}$ et $\dot{\vec{E}}^{(n)}$ à partir des anciennes. Ce n'est pas le cas de la méthode d'intégration de Newmark qui fait une *boucle* de calcul itérative pour trouver ces valeurs.³

Elle nécessite pour cela l'emploi de variables supplémentaires afin de mémoriser les calculs *intermédiaires* : q , r et s . Elle utilise aussi un paramètre ε pour contrôler la convergence de sa propre boucle de calcul.

3. On parle de méthode « *implicite* » : elle n'utilise pas une formule explicite pour calculer les nouvelles valeurs, mais un algorithme itératif ; cf section G, page 24, pour plus de détails.

Comme pour les méthodes précédentes, nous décrivons ici les pas de calcul pour passer de l'étape $n-1$ à l'étape n de l'intégration (on ne parle donc pas ici de la boucle en n elle-même; n en tant que tel est *fixe* ici). En particulier, toutes les grandeurs en « $(n-1)$ » sont donc constantes pour les calculs présentés ici.

Initialisation :

$$\begin{aligned} - \dot{\vec{E}}^{(n)} &\leftarrow \dot{\vec{E}}^{(n-1)} \\ - \vec{E}^{(n)} &\leftarrow \vec{E}^{(n-1)} \\ - s &\leftarrow f(T_{n-1}, \vec{E}^{(n-1)}, \dot{\vec{E}}^{(n-1)}) \end{aligned}$$

Répéter les quatre calculs suivants⁴ :

$$\begin{aligned} - q &\leftarrow \vec{E}^{(n)} \\ - r &\leftarrow f(T_n, \vec{E}^{(n)}, \dot{\vec{E}}^{(n)}) \\ - \dot{\vec{E}}^{(n)} &\leftarrow \dot{\vec{E}}^{(n-1)} + \frac{\Delta t}{2}(r + s) \\ - \vec{E}^{(n)} &\leftarrow \vec{E}^{(n-1)} + \Delta t \cdot \dot{\vec{E}}^{(n-1)} + \frac{\Delta t^2}{3}(\frac{1}{2}r + s) \end{aligned}$$

tant que $\|\vec{E}^{(n)} - q\| \geq \varepsilon$

3.4 Intégrateur Runge-Kutta d'ordre 4

3.4.1 Équation différentielle du 2^e ordre

La méthode d'intégration numérique de Runge-Kutta d'ordre 4 nécessite huit variables intermédiaires : $k_1, k_2, k_3, k_4, k'_1, k'_2, k'_3$ et k'_4 .

On calcule $\vec{E}^{(n)}$ et $\dot{\vec{E}}^{(n)}$ comme suit :

$$\begin{aligned} \vec{E}^{(n)} &= \vec{E}^{(n-1)} + \frac{\Delta t}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ \dot{\vec{E}}^{(n)} &= \dot{\vec{E}}^{(n-1)} + \frac{\Delta t}{6}(k'_1 + 2k'_2 + 2k'_3 + k'_4) \end{aligned}$$

avec :

$$k_1 = \dot{\vec{E}}^{(n-1)}$$

4. J'insiste : ce n'est pas une boucle en n ici !

$$\begin{aligned}
k'_1 &= f(T_{n-1}, \vec{E}^{(n-1)}, \dot{\vec{E}}^{(n-1)}) \\
k_2 &= \dot{\vec{E}}^{(n-1)} + \frac{\Delta t}{2} k'_1 \\
k'_2 &= f(T_{n-1} + \frac{\Delta t}{2}, \vec{E}^{(n-1)} + \frac{\Delta t}{2} k_1, \dot{\vec{E}}^{(n-1)} + \frac{\Delta t}{2} k'_1) \\
k_3 &= \dot{\vec{E}}^{(n-1)} + \frac{\Delta t}{2} k'_2 \\
k'_3 &= f(T_{n-1} + \frac{\Delta t}{2}, \vec{E}^{(n-1)} + \frac{\Delta t}{2} k_2, \dot{\vec{E}}^{(n-1)} + \frac{\Delta t}{2} k'_2) \\
k_4 &= \dot{\vec{E}}^{(n-1)} + \Delta t k'_3 \\
k'_4 &= f(T_n, \vec{E}^{(n-1)} + \Delta t k_3, \dot{\vec{E}}^{(n-1)} + \Delta t k'_3)
\end{aligned}$$

Note : $T_n = T_{n-1} + \Delta t$.

3.4.2 Équation différentielle du 1^{er} ordre

$$\vec{E}^{(n)} = \vec{E}^{(n-1)} + \frac{\Delta t}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

avec :

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(T_{n-1}, \vec{E}^{(n-1)}) \\
k_2 &= f(T_{n-1} + \frac{\Delta t}{2}, \vec{E}^{(n-1)} + \frac{\Delta t}{2} k_1) \\
k_3 &= f(T_{n-1} + \frac{\Delta t}{2}, \vec{E}^{(n-1)} + \frac{\Delta t}{2} k_2) \\
k_4 &= f(T_n, \vec{E}^{(n-1)} + \Delta t k_3)
\end{aligned}$$

A Notations

On note par des lettres simples les grandeurs scalaires (p.ex. x) et en **gras** surligné d'une flèche les grandeurs vectorielles (p.ex. \vec{x}).

Par convention, on note x la norme du vecteur \vec{x} (p.ex. $v = \|\vec{v}\|$) et les composantes sont notées par un indice (et sont des scalaires) : x_1 est ainsi la première composante du vecteur \vec{x} .

La dérivée temporelle de x est notée \dot{x} et celle de \vec{x} , $\dot{\vec{x}}$. Notez bien que la dérivée d'un vecteur, p.ex. $\dot{\vec{x}}$, n'est, dans le cas général, pas égale au vecteur des dérivées des composantes, en particulier si le repère tourne. \dot{x}_1 représente la dérivée de la (première) composante, alors que la (première) composante de la dérivée du vecteur sera notée $(\dot{\vec{x}})_1$.

On note par ailleurs $\{\vec{x}\}_1$ le vecteur unitaire colinéaire et de même sens que \vec{x} , c.-à-d. :

$$\{\vec{x}\}_1 = \frac{1}{x} \vec{x}$$

La notation « \longleftarrow » est une notation algorithmique signifiant « mise à jour », « devient ». Par exemple pour dire que la grandeur x augmente d'une valeur a , on note : $x \longleftarrow x + a$.

Dans les sections concernant les intégrateurs, on note :

- Δt , le « pas de temps » (« *timestep* » en anglais) pour l'intégration numérique ;
- $T_n = T_0 + n\Delta t$
- et $\vec{E}^{(n)}$, le vecteur $\vec{E}(T_n)$.

Résumé de quelques notations fréquentes :

- \vec{x} : position d'un objet ;
- \vec{v} : vitesse du centre de masse ;
- \vec{E} : vecteur des degrés de liberté du système (voir annexe C pour la notion de degré de liberté) ;
- θ : écart angulaire par rapport à la position de repos ;
- plus généralement, si nécessaire, angles d'Euler : ψ , θ et φ ,
- m : masse ;
- \vec{n} : vecteur « normale » (unitaire, perpendiculaire aux vecteurs tangents) ;
- \vec{O} : « origine » des objets, point de repère pour les placer dans l'espace ; pour

les objets simples, c'est simplement la position du centre de masse dans le repère utilisé pour la visualisation ;

- \vec{d} : vecteur de « direction » des objets (p.ex. axe d'un ressort), pour les orienter dans l'espace de visualisation ;
- L : longueur (générique) ; l : « largeur » ; h : « hauteur » ;
- \vec{e}_L : vecteur unitaire suivant la longueur ; \vec{e}_l : suivant la « largeur » (la « hauteur » est suivant \vec{n}) ;
- R, r : rayons.

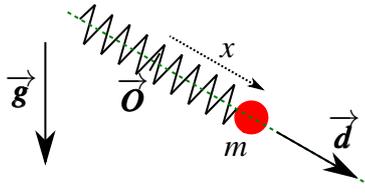


FIGURE 1 – Ressort

B Divers objets

Cette annexe regroupe divers types d'objets physiques que vous pouvez intégrer dans votre projet si vous le souhaitez (certains seront proposés et détaillés dans les données hebdomadaires précises).

B.1 Ressort

On considère ici une masse m attachée à un ressort idéal de constante de raideur k , placée sur un axe (barre) donné par le vecteur unitaire \vec{d} soumis à la pesanteur (voir figure 1).

Il existe plusieurs choix possibles pour représenter la position de la masse m . La plus simple étant certainement de placer l'origine du référentiel à l'endroit où se situe la masse lorsque le système est au repos (voir figure 1). On positionne de plus l'axe des abscisses du référentiel suivant l'axe \vec{d} du ressort.

La masse subit trois forces :

1. la force de rappel du ressort : $\vec{F}_r = -kx\vec{d}$;
2. une force externe \vec{F}_{ext} , typiquement la force de pesanteur $m\vec{g}$, mais dont les contraintes physiques (attachement de la masse à la barre) font que seule la projection sur l'axe \vec{d} influe sur le mouvement ;
3. (éventuellement) une force de frottement fluide $\vec{F}_f = -b\dot{x}\vec{d}$.

En utilisant la 2^e loi de Newton projetée sur \vec{d} , on obtient :

$$m\ddot{x} = F_r + \vec{F}_{ext} \cdot \vec{d} + F_f = -b\dot{x} - kx + \vec{F}_{ext} \cdot \vec{d}$$

On obtient ainsi l'équation du mouvement de ce système (projection sur l'axe \vec{d}) :

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx - \vec{F}_{ext} \cdot \vec{d} = 0$$

Si \vec{F}_{ext} se réduit à $m\vec{g}$, cela donne :

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx - m(\vec{g} \cdot \vec{d}) = 0$$

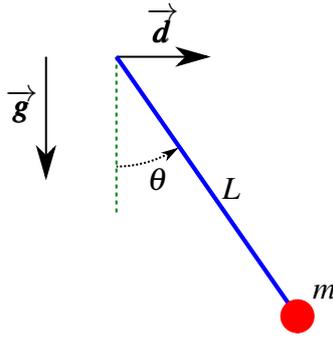


FIGURE 2 – Pendule pesant

La variable que l'on a choisie ici pour représenter ce système à un seul degré de liberté est en l'occurrence la première composante x du vecteur position de la masse dans le référentiel indiqué plus haut, c.-à-d. dans ce cas $\vec{E} = (x)$, vecteur à une dimension. Et donc pour ce système

$$f(t, \vec{E}, \dot{\vec{E}}) = \frac{1}{m} (\vec{F}_{ext} \cdot \vec{d} - kE_1 - b\dot{E}_1) \quad (2)$$

Si \vec{F}_{ext} se réduit à $m\vec{g}$, cela donne :

$$f(t, \vec{E}, \dot{\vec{E}}) = -\frac{k}{m} E_1 - \frac{b}{m} \dot{E}_1 + \vec{g} \cdot \vec{d}$$

Les paramètres propres (internes) du système sont : k, m, L (longueur au repos, inutile dans l'équation du mouvement, mais utile pour effectivement « dessiner » le système) et b .

La position dans l'espace (3D) de la masse est donnée par $\vec{O} + E_1 \vec{d}$, et sa vitesse par $\dot{E}_1 \vec{d}$.

B.2 Pendule pesant (de longueur fixe)

On considère ici un pendule physique de longueur L (constante) et de masse m soumis à une force externe \vec{F}_{ext} , typiquement la gravité (voir figure 2).

L'équation du mouvement d'un tel système est alors donnée par la relation⁵ :

$$mL^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} - L\vec{F}_{ext} \cdot \vec{u} = 0$$

où b est la viscosité de l'air et/ou un frottement fluide sur l'axe et \vec{u} le vecteur unitaire tangent au mouvement (et dans le sens trigonométrique), c.-à-d. $\vec{u} = \cos \theta \vec{d} - \sin \theta \{ \vec{g} \}_1$.

5. Projection de la seconde loi de Newton sur l'axe \vec{u} ; les projections sur l'axe \vec{u}_1 étant à l'équilibre, par construction.

Remarque : si vous placez votre repère de sorte que \vec{g} soit suivant l'axe des z , alors la notation « $a \{ \vec{g} \}_1$ » revient *simplement* à dire « a en 3^e coordonnée » ou à parler du vecteur $(0, 0, a)$;

de même dans ce cas, la notation « $\vec{b} \cdot \{ \vec{g} \}_1$ » revient *simplement* à dire « prendre la 3^e coordonnée de \vec{b} ». **[fin de la remarque.]**

Le vecteur \vec{d} , unitaire et orthogonal à \vec{g} , sert à définir le plan dans lequel se déplace le pendule (plan défini par \vec{d} et \vec{g}).

Notez que l'on peut étendre l'équation précédente à tout solide indéformable en rotation autour d'un axe en remplaçant L par la distance entre l'axe et le centre de masse du corps.

Les paramètres propres (internes) d'un pendule pesant sont : m , L et b .

Son vecteur d'état est $\vec{E} = (\theta)$, écart angulaire à la position de repos, et

$$f(t, \vec{E}, \dot{\vec{E}}) = \frac{1}{mL} \left(\cos(E_1) \vec{F}_{ext} \cdot \vec{d} - \sin(E_1) \vec{F}_{ext} \cdot \vec{k} - \frac{b}{L} \dot{E}_1 \right)$$

avec $\vec{k} = \{ \vec{g} \}_1$.

Concrètement, la contrainte « cercle » (de centre \vec{O} , de rayon L , dans le plan (\vec{d}, \vec{k})) transformera le vecteur force \vec{F}_{ext} en le scalaire

$$\boxed{\frac{1}{mL} \left(\cos(\theta) \vec{F}_{ext} \cdot \vec{d} - \sin(\theta) \vec{F}_{ext} \cdot \vec{k} - \frac{b}{L} \dot{\theta} \right)}$$

(avec θ le degré de liberté du pendule ; $\vec{E} = (\theta)$).

La position de la masse est donnée par $\vec{O} + L \cos(E_1) \vec{k} + L \sin(E_1) \vec{d}$, et sa vitesse par $L \dot{E}_1 (\cos(E_1) \vec{d} - \sin(E_1) \vec{k})$.

Si jamais vous en avez besoin par ailleurs (optionnel), la force totale s'appliquant à la boule au bout du pendule (y compris force centripète, ou tension) est donnée par :

$$\vec{F} = mL \left[f(t, \vec{E}, \dot{\vec{E}}) (\cos(E_1) \vec{d} - \sin(E_1) \vec{k}) - \dot{E}_1^2 (\sin(E_1) \vec{d} + \cos(E_1) \vec{k}) \right].$$

Mais cette force n'est pas nécessaire pour calculer l'évolution du pendule. C'est bien son équation d'évolution donnée plus haut qu'il faut utiliser pour cela.

B.3 Pendule sphérique

Si le pendule n'est pas contraint à rester dans un plan, mais peut évoluer librement en 3D (mais toujours avec un bras de longueur fixe, une barre, pas une ficelle), il faut alors deux

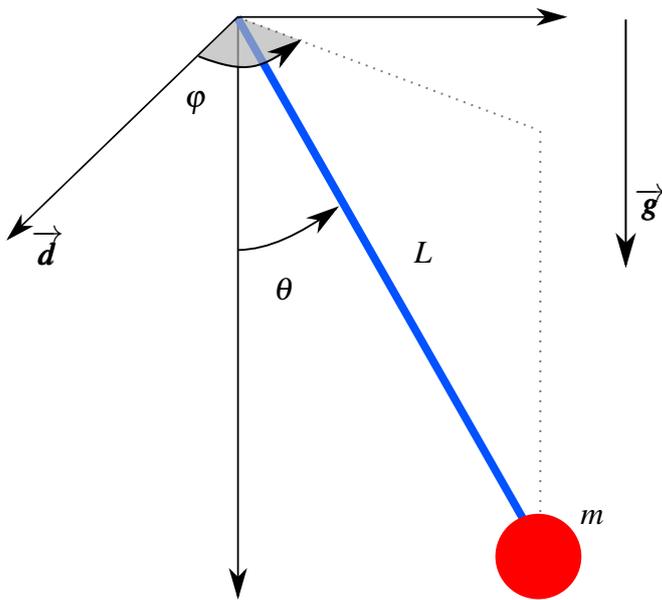


FIGURE 3 – Pendule sphérique

angles pour le caractériser. Le vecteur d'état \vec{E} est donc maintenant à deux dimensions : $\vec{E} = (\theta, \varphi)$, voir figure 3.

Notez que ce cadre permet aussi de décrire un objet roulant sans frottement sur une surface sphérique (p.ex. une bille dans un bol).

Sans frottement fluide, l'équation du mouvement d'un tel système est alors donnée par la relation :

$$\begin{aligned} mL \left(\ddot{\theta} - \dot{\varphi}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \right) &= \vec{F}_{ext} \cdot \vec{u}_{\theta} \\ mL \left(\ddot{\varphi} \sin(\theta) + 2\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos(\theta) \right) &= \vec{F}_{ext} \cdot \vec{u}_{\varphi} \end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned} \vec{u}_{\theta} &= \cos(\theta) \cos(\varphi) \vec{d} + \cos(\theta) \sin(\varphi) \vec{j} - \sin(\theta) \vec{k} \\ \vec{u}_{\varphi} &= -\sin(\varphi) \vec{d} + \cos(\varphi) \vec{j} \end{aligned}$$

avec $\vec{k} = \{\vec{g}\}_1$ et $\vec{j} = \vec{d} \wedge \vec{k}$.

Ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= \frac{1}{mL} \vec{F}_{ext} \cdot \vec{u}_{\theta} + \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\varphi}^2 \\ \ddot{\varphi} &= \frac{1}{mL \sin(\theta)} \vec{F}_{ext} \cdot \vec{u}_{\varphi} - 2 \cotan(\theta) \dot{\theta} \dot{\varphi} \end{aligned}$$

La position de la masse est donnée par :

$$\vec{O} + L \cos(\theta) \vec{k} + L \sin(\theta) \cos(\varphi) \vec{d} + L \sin(\theta) \sin(\varphi) \vec{j},$$

et sa vitesse par

$$L \left(-\dot{\theta} \sin(\theta) \vec{k} + \left[\dot{\theta} \cos(\theta) \cos(\varphi) - \dot{\varphi} \sin(\theta) \sin(\varphi) \right] \vec{d} + \left[\dot{\theta} \cos(\theta) \sin(\varphi) + \dot{\varphi} \sin(\theta) \cos(\varphi) \right] \vec{j} \right).$$

Pour la force s'appliquant sur la boule du bout (y compris la tension donc) :

$$\vec{F} = mL \left[\left(-\ddot{\theta} - \dot{\varphi}^2 \sin^2(\theta) \right) \vec{u}_\rho + \left(f_1 - \dot{\varphi}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \right) \vec{u}_\theta + \left(f_2 \sin(\theta) - 2 \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos(\theta) \right) \vec{u}_\varphi \right]$$

où f_1 est la première composante de la fonction d'évolution f (c.-à-d. $f_1 = \ddot{\theta}$), f_2 la seconde composante (c.-à-d. $\ddot{\varphi}$) et :

$$\vec{u}_\rho = \sin(\theta) \cos(\varphi) \vec{d} + \sin(\theta) \sin(\varphi) \vec{j} + \cos(\theta) \vec{k}$$

C Notion de degré de liberté

En Physique, le nombre de degrés de liberté d'un système correspond au nombre de déplacements *indépendants* qu'il peut effectuer :

- pour un point matériel libre de se déplacer dans tout l'espace, on compte 3 degrés de liberté, car il peut aller dans chacune des directions indépendamment ;
- le centre de masse d'une boule qui reste sur un billard (c.-à-d. qu'on ne considère pas ici les rotations de la boule sur elle-même, et on suppose qu'elle ne saute pas) ne possède que deux degrés de liberté, car la boule est astreinte à se déplacer dans un plan ; la boule elle-même a cinq degrés de liberté (on ajoute 3 degrés de liberté de rotation), voire 6 si on autorise la boule à sauter ;
- un wagonnet de « grand-huit » ne possède qu'un seul degré de liberté car il est obligé de suivre les rails et ne peut aller qu'« en avant » ou « en arrière », même si en réalité il se déplace dans un espace à 3 dimensions.

Le nombre de degrés de liberté d'un système correspond ainsi au nombre de variables *indépendantes* qu'il faut pour décrire l'état de ce système. L'état d'un système à un seul degré de liberté peut se représenter à l'aide d'une seule variable réelle. Par exemple, pour décrire la position d'un wagonnet de « grand-huit », il suffit d'une seule variable, qui serait par exemple, la distance parcourue (suivant les rails) depuis la station de départ (abscisse curviligne).

Une telle variable n'est pas forcément une distance, il peut également s'agir d'un angle ou de tout autre moyen permettant de représenter de manière univoque toutes les positions que peut prendre l'objet étudié.

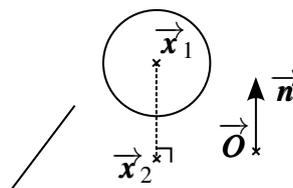
Au premier abord, on peut penser que l'on a inutilement compliqué la chose et perdu de l'information concernant la position « réelle » de l'objet dans l'espace. On n'a cependant rien perdu comme information vu qu'on peut toujours facilement reconstruire la position dans l'espace à partir des degrés de liberté et d'une position de référence ; mais on a par contre gagné en simplicité puisque nous n'avons plus besoin de manipuler tous les vecteurs de toutes les composantes dans les équations du mouvement, mais uniquement ceux qui sont nécessaires, *a priori* en nombre plus réduit. Le gain ne paraît pas important dans le cas d'un simple pendule, mais il l'est plus dans le cas de systèmes composés complexes ayant plusieurs degrés de liberté, mais nettement moins que de composantes.

D Point le plus proche de différentes formes

Bien que ceci ne soit pas du tout demandé dans ce projet, vous pourriez souhaiter ajouter le fait que certains objets se rencontrent (voir aussi l'annexe E) ou mesurer leur distance par rapport à d'autres object. Cette annexe explique comment déterminer le point le plus proche entre un point et différentes formes.

D.1 Plan infini

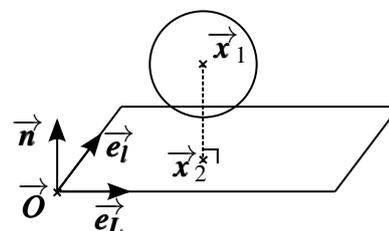
Dans le cas d'un plan infini défini par un point \vec{O} et un vecteur normal \vec{n} (unitaire), le point \vec{x}_2 le plus proche sur ce plan du point de position \vec{x}_1 s'exprime comme :



$$\vec{x}_2 = \vec{x}_1 + \left((\vec{O} - \vec{x}_1) \cdot \vec{n} \right) \vec{n}$$

D.2 Portion de plan

Dans le cas d'une portion rectangulaire de plan d'origine \vec{O} , de normale \vec{n} (unitaire), de longueur L suivant la direction \vec{e}_L (unitaire et orthogonal à \vec{n}) et de largeur l suivant la direction \vec{e}_l ($\vec{e}_l = \vec{n} \wedge \vec{e}_L$), le point \vec{x}_2 le plus proche sur ce plan du point de position \vec{x}_1 se calcule comme suit :



1. Commencez par calculer le point le plus proche dans le plan infini comme précédemment :

$$\vec{x}_2 \leftarrow \vec{x}_1 + \left((\vec{O} - \vec{x}_1) \cdot \vec{n} \right) \vec{n}.$$

2. Calculez ensuite ses coordonnées suivant \vec{e}_L et \vec{e}_l :

$$x_{kL} = (\vec{x}_2 - \vec{O}) \cdot \vec{e}_L,$$

$$x_{kl} = (\vec{x}_2 - \vec{O}) \cdot \vec{e}_l.$$

3. Si $x_{kL} > L$

$$\vec{x}_2 \leftarrow \vec{x}_2 - (x_{kL} - L) \vec{e}_L,$$

sinon, si $x_{kL} < 0$

$$\vec{x}_2 \leftarrow \vec{x}_2 - x_{kL} \vec{e}_L.$$

4. Ensuite, si $x_{kl} > l$

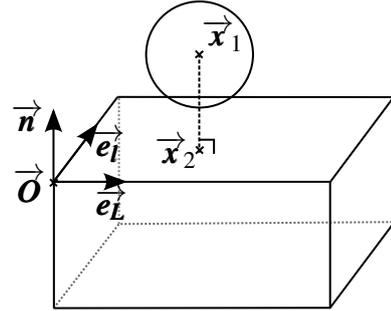
$$\vec{x}_2 \leftarrow \vec{x}_2 - (x_{kl} - l) \vec{e}_i,$$

sinon, si $x_{kl} < 0$

$$\vec{x}_2 \leftarrow \vec{x}_2 - x_{kl} \vec{e}_i.$$

D.3 Brique (parallélépipède)

Dans le cas d'un parallélépipède rectangle (« brique ») d'origine \vec{O} , de hauteur h suivant la direction \vec{n} (unitaire), de longueur L suivant la direction \vec{e}_L (unitaire et orthogonal à \vec{n}) et de largeur l suivant la direction \vec{e}_i ($\vec{e}_i = \vec{n} \wedge \vec{e}_L$), le point \vec{x}_2 le plus proche sur l'objet sphérique de centre \vec{x}_1 se calcule comme suit :



Calculez le point le plus proche à chacune des six faces (voir section précédente) et retenez au final le plus proche de \vec{x}_1 .

Attention pour cela aux caractéristiques de chacune des faces (je prends ici la convention que la normale sort de la brique et que la face est toujours du côté coordonnées positives de ses axes, ce n'est pas utile ici mais pourrait peut-être l'être ailleurs (distinction intérieur/extérieur)) :

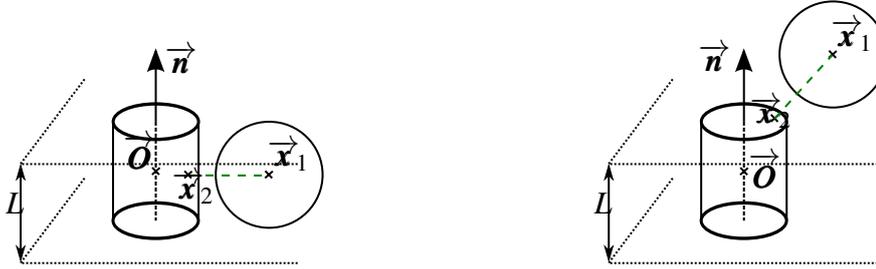
face	origine	normale	longueur	« \vec{e}_L »	largeur	« \vec{e}_i »
1	\vec{O}	\vec{n}	L	\vec{e}_L	l	\vec{e}_i
2	\vec{O}	$-\vec{e}_i$	h	$-\vec{n}$	L	\vec{e}_L
3	\vec{O}	$-\vec{e}_L$	l	\vec{e}_i	h	$-\vec{n}$
4	$\vec{O} + L\vec{e}_L$	\vec{e}_L	h	$-\vec{n}$	l	\vec{e}_i
5	$\vec{O} + l\vec{e}_i$	\vec{e}_i	L	\vec{e}_L	h	$-\vec{n}$
6	$\vec{O} - h\vec{n}$	$-\vec{n}$	l	\vec{e}_i	L	\vec{e}_L

D.4 Sphère

Dans le cas d'une sphère de centre \vec{O} et de rayon R , le point \vec{x}_2 le plus proche sur cette sphère du point de position \vec{x}_1 est donné par :

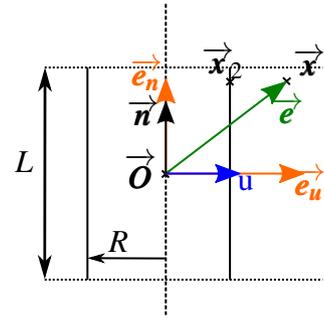
$$\vec{x}_2 = \vec{O} + R \left\{ \frac{\vec{x}_1 - \vec{O}}{\|\vec{x}_1 - \vec{O}\|} \right\}_1$$

D.5 Cylindre



Dans le cas d'un cylindre de révolution, de centre \vec{O} , de rayon R , de hauteur L et de normale \vec{n} (unitaire) et pour point de position \vec{x} , nous introduisons les notations suivantes :

$$\begin{aligned}\vec{e} &= \vec{x} - \vec{O} \\ \vec{e}_n &= (\vec{e} \cdot \vec{n}) \vec{n} \\ \vec{n}^* &= \frac{\vec{e}_n}{\|\vec{e}_n\|} = \frac{\vec{e}_n}{\vec{e} \cdot \vec{n}} = \text{signe}(\vec{e} \cdot \vec{n}) \vec{n} \\ \vec{e}_u &= \vec{e} - \vec{e}_n = \vec{e} - (\vec{e} \cdot \vec{n}) \vec{n} \\ \vec{u} &= \frac{\vec{e}_u}{\|\vec{e}_u\|} = \{\vec{e}_u\}_1\end{aligned}$$



(Remarquez que, contrairement à \vec{n} , \vec{n}^* est toujours dirigé du même côté de \vec{O} que \vec{x} .)

Le point matériel (objet) considéré est forcément hors du cylindre, c.-à-d. :
soit

$$|\vec{e} \cdot \vec{n}| \geq \frac{L}{2},$$

soit

$$\|\vec{e}_u\|^2 = \|\vec{e}\|^2 - (\vec{e} \cdot \vec{n})^2 \geq R.$$

Le point \vec{x}_k le plus proche sur ce cylindre s'exprime alors comme :

— Si $|\vec{e} \cdot \vec{n}| < \frac{L}{2}$:

$$\vec{x}_k = \vec{O} + \vec{e}_n + R \vec{u}$$

— Sinon ($|\vec{e} \cdot \vec{n}| \geq \frac{L}{2}$) :

$$\vec{x}_k = \vec{O} + \frac{L}{2} \vec{n}^* + \min(R, \|\vec{e}_u\|) \vec{u}$$

E Chocs

Bien que ceci ne soit pas du tout demandé dans ce projet, vous pourriez souhaiter ajouter la gestion de chocs entre objets qui se rencontrent (voir aussi l'annexe D). Cette annexe explique comment procéder.

E.1 Chocs simples

Nous ne considérons ici que des objets à trois degrés de liberté de translation, c.-à-d. sans rotation propre, modélisés par la théorie des chocs et des frottements solides (formules de Coulomb). Pour une version complète, plus avancée, incluant la rotation propre des objets, voir la sous-section suivante.

Les paramètres de la théorie des chocs sont :

- le coefficient α de restitution (perte d'énergie dans les chocs) : $0 \leq \alpha \leq 1$; $\alpha = 1$ correspond aux chocs élastiques, $\alpha = 0$ à un choc totalement mou (écrasement) ;

(Note : dans ce projet, on pourra modéliser des trampolines (**totalement optionnel**) comme un choc avec $\alpha > 1$)

- le coefficient μ de frottement entre corps ($\mu \geq 0$).

Même si ce n'est pas très réaliste du point de vue physique, on pourra⁵ généraliser à μ de la forme $\mu_1 \cdot \mu_2$ pour avoir différents types de contacts entre différentes surfaces (μ_1 pour la première, μ_2 pour la seconde).

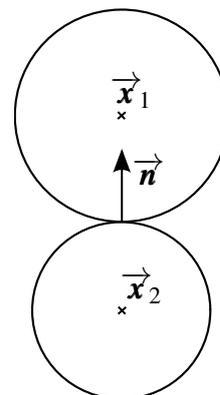
Notations :

- \vec{x}_i position de l'objet i
- \vec{n} vecteur (unitaire) normal au point de choc, dirigé vers (c.-à-d. dans) le corps 1 :

$$\vec{n} = \{ \vec{x}_1 - \vec{x}_2 \}_1$$

(voir si nécessaire les notations générales en annexe A.)

- $\lambda = (1 + \alpha) \frac{m_2}{m_1 + m_2}$



Pour gérer le choc entre deux objets sphériques de rayons respectifs R_1 et R_2 , on utilisera l'algorithme suivant (lorsqu'il y a choc ! c.-à-d. lorsque $\| \vec{x}_1 - \vec{x}_2 \| \leq R_1 + R_2$).

On considérera que le choc est instantané (c.-à-d. se produit sur un temps nettement inférieur à Δt) de sorte que la mise à jour est vraiment un changement d'état (discontinuité) et non pas une équation d'évolution temporelle (c.-à-d. pas de Δt dans ces équations) :

1. s'il y a choc, il faut d'abord mettre à jour les forces s'exerçant sur les objets (calcul des réactions) :

Soit $F_{n1} = \vec{F}_1 \cdot \vec{n}$, la composante suivant la normale au choc des forces s'exerçant sur l'objet 1, et $F_{n2} = \vec{F}_2 \cdot \vec{n}$ celle de l'objet 2.

Si $F_{n1} < 0$, alors cette partie de la force s'annule par réaction de l'autre objet : \vec{F}_1 devient alors $\vec{F}_1 - F_{n1} \vec{n}$:

$$\vec{F}_1 \leftarrow \vec{F}_1 - F_{n1} \vec{n}$$

Cette réaction s'ajoute par contre aux forces s'exerçant sur l'autre objet :

$$\vec{F}_2 \leftarrow \vec{F}_2 + F_{n1} \vec{n}$$

Refaire ensuite de même avec les forces de l'autre objet : si $F_{n2} > 0$ (attention ici au changement de sens de l'inégalité !), alors

$$\vec{F}_1 \leftarrow \vec{F}_1 + F_{n2} \vec{n} \quad \text{et} \quad \vec{F}_2 \leftarrow \vec{F}_2 - F_{n2} \vec{n}$$

2. calculez ensuite

$$v^* = (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \cdot \vec{n}$$

et la vitesse relative du point de contact

$$\vec{v}_c = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 + v^* \vec{n}$$

3. si $7\mu(1 + \alpha)v^* \geq 2v_c$:

$$\Delta \vec{v} = \lambda v^* \vec{n} - \frac{2m_2}{7(m_1 + m_2)} \vec{v}_c$$

4. sinon (\vec{v}_c forcément non nul) :

$$\Delta \vec{v} = \lambda v^* (\vec{n} - \mu \{ \vec{v}_c \}_1)$$

5. mise à jour :

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \vec{v}_1 + \Delta \vec{v} \\ \vec{v}_2 &= \vec{v}_2 - \frac{m_1}{m_2} \Delta \vec{v} \end{aligned}$$

Pour les chocs avec les obstacles (c.-à-d. si $\|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\| \leq R_1$) : reprendre les mêmes équations que ci-dessus, mais avec \vec{v}_2 nulle et m_2 infinie (c.-à-d. $m_1/m_2 = 0$, $m_2/(m_1 + m_2) = 1$), ce qui donne :

1. pour le calcul de la réaction, seul l'objet mobile est remis à jour, les obstacles ne bougent pas et n'ont pas besoin du calcul de leur force :

Si $F_{n1} = \vec{F}_1 \cdot \vec{n}$ est négatif, alors :

$$\vec{F}_1 \longleftarrow \vec{F}_1 - F_{n1} \vec{n}$$

2. pour les vitesses, calculez ensuite

$$v^* = -\vec{v}_1 \cdot \vec{n}$$

et la vitesse relative du point de contact

$$\vec{v}_c = \vec{v}_1 + v^* \vec{n}$$

3. si $7\mu(1 + \alpha)v^* \geq 2v_c$:

$$\Delta \vec{v} = (1 + \alpha)v^* \vec{n} - \frac{2}{7} \vec{v}_c$$

4. sinon :

$$\Delta \vec{v} = (1 + \alpha)v^* (\vec{n} - \mu \{ \vec{v}_c \}_1)$$

5. mise à jour :

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_1 + \Delta \vec{v}$$

F Choc entre objets sphériques à 6 degrés de liberté

Pour gérer le choc entre deux objets sphériques (de rayons respectifs R_1 et R_2 , positions \vec{x}_1 et \vec{x}_2 , et rotations $\vec{\omega}_1$ et $\vec{\omega}_2$), on utilisera l'algorithme suivant (lorsqu'il y a choc ! c.-à-d. si $\|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\| \leq R_1 + R_2$).

On considérera que le choc est instantané (c.-à-d. se produit sur un temps nettement inférieur à Δt) de sorte que la mise à jour est vraiment un changement d'état (discontinuité) et non pas une équation d'évolution temporelle (c.-à-d. pas de Δt dans ses équations) :

1. s'il y a choc, il faut d'abord mettre à jour les forces s'exerçant sur les objets (calcul des *réactions*) :

Soit $F_{n1} = \vec{F}_1 \cdot \vec{n}$, la composante suivant la normale au choc des forces s'exerçant sur l'objet 1, et $F_{n2} = \vec{F}_2 \cdot \vec{n}$ celle de l'objet 2.

Si $F_{n1} < 0$, alors cette partie de la force s'annule par réaction de l'autre objet :

$$\vec{F}_1 \leftarrow \vec{F}_1 - F_{n1} \vec{n}$$

Cette réaction s'ajoute par contre aux forces s'exerçant sur l'autre objet :

$$\vec{F}_2 \leftarrow \vec{F}_2 + F_{n1} \vec{n}$$

Refaire ensuite de même avec les forces de l'autre objet : si $F_{n2} = \vec{F}_2 \cdot \vec{n} > 0$ (attention ici au changement de sens de l'inégalité!), alors

$$\vec{F}_1 \leftarrow \vec{F}_1 + F_{n2} \vec{n} \quad \text{et} \quad \vec{F}_2 \leftarrow \vec{F}_2 - F_{n2} \vec{n}$$

2. calculez ensuite

$$v^* = (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \cdot \vec{n}$$

et la vitesse relative du point de contact

$$\vec{v}_c = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 + v^* \vec{n} + \vec{n} \wedge (R_1 \vec{\omega}_1 + R_2 \vec{\omega}_2)$$

3. si $7\mu(1 + \alpha)v^* \geq 2v_c$:

$$\Delta \vec{v} = \lambda v^* \vec{n} - \frac{2m_2}{7(m_1 + m_2)} \vec{v}_c$$

$$\Delta \vec{\omega} = \frac{5m_2}{7R_1(m_1 + m_2)} (\vec{n} \wedge \vec{v}_c)$$

4. sinon (\vec{v}_c forcément non nul) :

$$\Delta \vec{v} = \lambda v^* (\vec{n} - \mu \{ \vec{v}_c \}_1)$$

$$\Delta \vec{\omega} = \frac{5}{2R_1} \mu \lambda v^* (\vec{n} \wedge \{ \vec{v}_c \}_1)$$

5. mise à jour :

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_1 + \Delta \vec{v}$$

$$\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_1 + \Delta \vec{\omega}$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_2 - \frac{m_1}{m_2} \Delta \vec{v}$$

$$\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_2 + \frac{m_1 R_1}{m_2 R_2} \Delta \vec{\omega}$$

Pour les chocs avec les obstacles (c.-à-d. si $\|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\| \leq R_1$) : reprendre les mêmes équations que ci-dessus, mais avec \vec{v}_2 et $\vec{\omega}_2$ nulles, et m_2 infinie (c.-à-d. $m_1/m_2 = 0$, $m_2/(m_1 + m_2) = 1$).

G Compléments sur l'intégration numérique

G.1 Généralités

Cette section est totalement hors programme et certainement difficile pour des 1^{re} années⁶. Je l'ai néanmoins ajoutée pour information pour ceux que le sujet intéresse et qui aimeraient en savoir un peu plus.

Les intégrateurs numériques sont par essence inexacts et calculent des valeurs approchées des solutions. Ils sont en cela caractérisés de trois façons :

- l'ordre de l'intégrateur, qui caractérise l'évolution (en fonction du temps de calcul) de l'erreur entre la solution calculée fournie et la solution exacte ;
à ne pas confondre avec l'ordre de l'équation différentielle intégrée !
- l'aspect symplectique ou non de l'intégrateur, qui caractérise grosso-modo « les frottements numériques », c.-à-d. la perte d'énergie subie par le système simulé par rapport au vrai système en raison des approximations de calcul ;

vous verrez plus tard en Physique que l'énergie d'un système est liée à ce que l'on appelle « l'hamiltonien » du système ; un intégrateur symplectique garde invariant l'hamiltonien du système simulé ;

- l'aspect « explicite » ou « implicite » : un intégrateur est « explicite » lorsque les calculs du pas suivant se font directement et il est « implicite » lorsque le calcul de chaque pas d'intégration est lui-même indirect, par approximations, et non pas exact, introduisant donc un deuxième niveau d'approximation dans le calcul.

Avant de détailler l'aspect symplectique des intégrateurs du premier ordre, donnons un résumé synthétique des résultats connus :

- l'intégrateur d'Euler « classique » est un intégrateur explicite du premier ordre non symplectique ;
- l'intégrateur d'Euler-Cromer est également du premier ordre ; il est symplectique et explicite pour les hamiltoniens séparables ;
- une version d'Euler-Cromer existe pour les hamiltoniens non séparables, mais est implicite ;
- les méthodes de Runge-Kutta sont non symplectiques, explicites pour les hamiltoniens séparables et existent en version implicite (non symplectique) pour les hamiltoniens non séparables ;
- la méthode de Newmark est symplectique mais implicite.

6. On y parle notamment d'hamiltonien, de hessien, et autres joyeusetés que vous découvrirez plus tard dans votre scolarité.

G.2 De l'aspect symplectique des intégrateurs « eulériens »

Soit une particule de masse m dans un potentiel $V(\vec{x})$ ne dépendant que de la position ; l'accélération subie est $\ddot{\vec{x}} = -\frac{1}{m} \vec{\nabla} V$, où $\vec{\nabla} V$ est le gradient de V .⁷

Considérons alors le schéma d'évolution suivant :

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n + \Delta t \vec{v}_n - \alpha \frac{\Delta t^2}{m} \vec{\nabla} V_n, \quad \vec{v}_{n+1} = \vec{v}_n - \frac{\Delta t}{m} \vec{\nabla} V_n$$

où α est une constante qui vaut soit 0 (intégrateur d'Euler « classique »), soit 1/2 (développement de Taylor négligeant les dérivées de l'accélération), soit 1 (intégrateur d'Euler-Cromer).

G.2.1 Approche « à la main » sur l'énergie

Considérons alors l'évolution de l'énergie au second ordre :

$$E_{n+1} = E_n + \frac{\Delta t^2}{2} \left(\vec{v}_n^T \nabla^2 V \vec{v}_n + (1 - 2\alpha) \frac{1}{m} (\vec{\nabla} V_n)^2 \right) + \mathcal{O}(\Delta t^3),$$

où $\nabla^2 V$ est le hessien du potentiel V .

On voit bien que si $\alpha \leq \frac{1}{2}$ l'énergie ne fait qu'*augmenter*. Pour $\alpha \leq \frac{1}{2}$ l'intégrateur ne peut pas être symplectique (et donc ni Euler, ni « Taylor » ne sont symplectiques).

Illustrons cela de façon concrète sur l'oscillateur harmonique à une dimension. On a $V(x) = \frac{1}{2} kx^2$, et on connaît la solution analytique $x = x_0 \cos(\omega t)$ et $v = -x_0 \omega \sin(\omega t)$ où $\omega = \sqrt{k/m}$.

La variation d'énergie entre deux pas de calcul de l'intégrateur devient :

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{\Delta t^2}{2} \left(kv^2 + (1 - 2\alpha) \frac{1}{m} k^2 x^2 \right) + \mathcal{O}(\Delta t^3) \\ &= \frac{\Delta t^2}{2} \frac{x_0 k^2}{m} (\sin^2(\omega t) + (1 - 2\alpha) \cos^2(\omega t)) + \mathcal{O}(\Delta t^3) \end{aligned}$$

En intégrant sur une période entière de l'oscillation, on trouve $\Delta E \propto \pi(2 - 2\alpha)$, ce qui nous amène à conclure qu'il faut $\alpha = 1$ pour que l'énergie de l'oscillateur harmonique soit stable en moyenne.

⁷. Toute la suite peut en fait s'appliquer à un hamiltonien séparable $H(\vec{p}, \vec{q}) = T(\vec{p}) + V(\vec{q})$. Ici $\vec{p} = m\vec{v}$ et $\vec{q} = \vec{x}$.

G.2.2 Preuve formelle de symplecticité

La définition d'un intégrateur symplectique est l'orthogonalité du déplacement dans l'espace des phases par rapport au gradient de l'hamiltonien, ce qui se traduit par l'équation suivante :

$$\left(\frac{\partial \vec{z}_{n+1}}{\partial \vec{z}_n} \right)^T J \left(\frac{\partial \vec{z}_{n+1}}{\partial \vec{z}_n} \right) = J$$

avec $\vec{z} = (\vec{v}, \vec{x})$ (point de l'espace des phases), $J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_3 \\ -\mathbf{1}_3 & 0 \end{pmatrix}$, où $\mathbf{1}_3$ est la matrice identité de dimension 3, et $\left(\frac{\partial \vec{z}_{n+1}}{\partial \vec{z}_n} \right)$ la matrice jacobienne de \vec{z}_{n+1} (en tant que fonction de \vec{z}_n).

Pour les schémas d'évolution considérés ici, on a :

$$\frac{\partial \vec{z}_{n+1}}{\partial \vec{z}_n} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_3 & -\frac{\Delta t}{m} \nabla^2 \mathbf{V} \\ \Delta t \mathbf{1}_3 & \mathbf{1}_3 - \alpha \frac{\Delta t^2}{m} \nabla^2 \mathbf{V} \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\left(\frac{\partial \vec{z}_{n+1}}{\partial \vec{z}_n} \right)^T J \left(\frac{\partial \vec{z}_{n+1}}{\partial \vec{z}_n} \right) = J + (1 - \alpha) \frac{\Delta t^2}{m} \begin{pmatrix} 0 & \nabla^2 \mathbf{V} \\ -\nabla^2 \mathbf{V} & 0 \end{pmatrix} .$$

Le schéma proposé n'est donc symplectique que pour $\alpha = 1$ (c.-à-d. Euler-Cromer).

G.2.3 Euler-Cromer pour les hamiltoniens non séparables

En fait, l'intégrateur d'Euler-Cromer se généralise aux hamiltoniens non séparables, tout en restant symplectique. La généralisation est :

$$\vec{p}_{n+1} = \vec{p}_n - \Delta t \overrightarrow{\nabla_{\vec{q}}} H(\vec{p}_{n+1}, \vec{q}_n) , \quad \vec{q}_{n+1} = \vec{q}_n + \Delta t \overrightarrow{\nabla_{\vec{p}}} H(\vec{p}_{n+1}, \vec{q}_n) .$$

Le problème avec cet intégrateur est que la première équation est *implicite* et nécessite alors souvent, en elle-même, une résolution numérique approchée (type « point fixe ») en \vec{p}_{n+1} .